

Acerca de la importancia de la Didáctica de la Matemática para nuestro país **Arturo Mena Lorca¹**

En este escrito nos proponemos dar una visión, forzosamente general, de la relevancia de la Didáctica de la Matemática para nuestra nación.

Para ello, intentaremos primero vislumbrar algunos aspectos más generales que afectan a la educación matemática en Chile y luego abordaremos someramente algunas cuestiones propiamente didácticas.

Educación y opinión

La educación es un asunto que a todos nos importa, a todos nos afecta: hermanos, hijos, familiares... nosotros mismos dependemos o hemos dependido de ella. A todos nos compete, y todos tenemos derecho a opinar al respecto: al fin y al cabo, vivimos en democracia.

El tema es muy complejo (incluye, por ejemplo, el hecho de que el sistema educacional chileno no solo es inequitativo, sino también regresivo –aumenta la falta de igualdad–) y requiere de múltiples miradas, pues no hay una (única) ciencia para abordarlo.

Sería deseable que las diversas concepciones subyacentes a esas miradas buscaran y encontraran puntos de genuino encuentro. Las opiniones, sin embargo, a menudo parecen divergir, y, sobre un tema tan importante como este, da la impresión de que, en definitiva, todo se vuelve opinable. Peor aún, en este ámbito tan importante, ocasionalmente se invocan adagios del tenor de *respeto mi opinión, como yo respeto la tuya*².

En el reino de la opinión, además, parecería que proferir un par de ellas que llamen la atención otorgara el calificativo de ‘experto’ en la materia –independientemente de que haya, antes o después, evidencias que respalden aquellas–.

El tema de la opinión es, de suyo, interesante. Por ejemplo, no todo lo que expresa un científico acerca de su tema de investigación está respaldado por la teoría que cultiva; ello no obstante, su opinión sobre esa materia es el producto de experiencia y estudio –por lo demás, en ese ámbito, el científico tiende a entregarnos algo más que su sola opinión–.

Opinión y saberes

Todos tenemos opinión, sobre muchas materias –sobre el transporte urbano, sobre la economía del país, sobre medicina–. Por otra parte, parece natural que, cuanto más específico sea un saber, menos opinemos sobre él. Por ejemplo, aun cuando estemos en desacuerdo con las últimas medidas económicas o no nos tomemos los medicamentos que nos prescriban, ciertamente pensamos que hay disciplinas que respaldan las decisiones correspondientes, y no nos postularíamos sin más para hacernos cargo de la economía, o de la salud de otra persona –y, en realidad, no son muchos los que opinan sobre la Teoría Especial de la Relatividad, pongamos por caso–.

En educación, por el contrario, parece evidente que la comunidad nacional no identifica un saber que sea el sustrato de las medidas que se toman. Ciertamente, lo anterior se explica un tanto porque el tema es muy amplio y variopinto. Pero no debería llevarse las cosas demasiado lejos.

¹ arturo.mena@ucv.cl

² Vale la pena agregar que si alguien diere, por ejemplo, una opinión contraria al teorema de Pitágoras, o que creyere que la tierra es plana, seguramente lo enviaríamos a estudiar –una persona respetable puede tener opiniones ridículas–. En cualquier caso, en el ámbito educacional, la opinión que prevalece (siquiera en forma transitoria) es, naturalmente, la de quien toma las decisiones.

Por ejemplo, pensar que, para enseñar una determinada materia, basta con conocer una cantidad variable de la disciplina en que se inserta y una también mudable de ‘asignaturas de educación’, manifiesta que quien la expresa es ignorante o bien recalcitrante, pues hay múltiples, autorizados y públicos datos en contrario³.

Tampoco basta, ante los problemas que plantea el área, con ‘reflexionar’, opción por sí sola desafortunada, pues no añade una dimensión de estudio –de los avances teóricos, de lo que ofrece el escenario internacional...– y cuya insuficiencia es perceptible. La alternativa más reciente de ‘innovación’, por su parte, a menudo se hace también en ausencia de información relevante, y suele correr el peligro de reiterar invenciones ya probadas y desechadas.

Frente a un asunto tan serio como el desarrollo del país y las expectativas primordiales de niños, jóvenes y adultos, trabajar de manera tan artesanal como la esbozada es algo a lo cual, seguramente, no tenemos derecho.

Importancia del tema

Con lo anterior no queremos decir que las opiniones no sean relevantes.

Para el caso de la enseñanza y los aprendizajes de Matemática, que nos ocupan aquí, hay algunas muy relevantes.

La Conferencia Mundial sobre la Ciencia, *Ciencia para el siglo XXI*, realizada por la UNESCO y el Consejo Internacional de la Ciencia, ICSU, por ejemplo, expresa que "... el acceso al saber científico con fines pacíficos desde una edad muy temprana forma parte del derecho a la educación que tienen todos los hombres y mujeres... la enseñanza de la ciencia es fundamental para la plena realización del ser humano, para crear una capacidad científica endógena y para contar con ciudadanos activos e informados..." (UNESCO-ICSU, 1999, Considerando, 10), y agrega: "La enseñanza científica, en sentido amplio, sin discriminación y que abarque todos los niveles y modalidades, es un requisito previo esencial de la democracia y el desarrollo sostenible". (Ibíd., La Ciencia al servicio del desarrollo, 33).

Ciertamente, podemos convenir, aprender Matemáticas es un asunto de importancia capital, y no solo un recurso de técnicos y científicos ni una suerte de adorno cultural para las personas. Por lo demás, las declaraciones anteriores se apoyan, a su vez, en evidencias.

Nuestro país ha reconocido la relevancia de la problemática general de la educación, y se ha preocupado seriamente de avanzar en ella; tanto es así que, en lo que va del siglo, ha cuadruplicado su inversión en el área. Sin embargo, los resultados no son los que querríamos: el Informe "Revisión de Políticas Educativas. Chile" (2004), de la OECD⁴ lo expresa claramente; los resultados de SIMCE, PISA, INICIA y otros lo ratifican. (La opinión pública manifiesta una y otra vez su impaciencia).

Política y técnica

El tema tiene, por supuesto, aspectos *políticos*⁵ y *técnicos*, pero la confusión que se aprecia entre unos y otros es bastante lamentable.

En un pueblo primitivo, una campaña de vacunación, pongamos por caso, sería un problema político –habría que convencer a las personas de que ello es necesario–, pero, en una comunidad civilizada, se trata de un problema técnico –hay que determinar a qué porcentaje de la población se puede y/o es conveniente vacunar⁶–.

³ Todos somos ignorantes; la diferencia es en qué. (Por ello, añadió alguien, lo que nos une no es el conocimiento, sino la ignorancia). Nuestra preocupación aquí es que se tomen decisiones ignorando la información disponible.

⁴ Citaremos a menudo este estudio, el más completo acerca de nuestro sistema educacional, y que se hizo con datos proporcionados por el gobierno de entonces y con metodologías ampliamente validadas en todo el mundo.

⁵ Tomamos el término en su acepción amplia; en español no distinguimos entre la más general de ‘hacer política’ (*politics*), y la más restringida de ‘hacer políticas’ (*policies*).

⁶ Preguntar a los usuarios del Metro si acaso para disminuir la contaminación debe restringirse la circulación de los automóviles con convertidor catalítico es caer en esta confusión. (Posiblemente, aquellos usuarios pedirían que se restringiera también la circulación de los automóviles eléctricos –*ley pareja no es dura*, se nos dirá tal vez–). Un error similar predijo como amplio ganador a Alf Landon (a quien usted posiblemente no recuerda) por sobre F. D. Roosevelt, en 1936 (!)

Los acuerdos políticos alcanzado en el país en educación –entre los que se cuentan el reconocimiento de su trascendencia para la nación, exigir acreditación de las carreras de pedagogía y otros muchos– revisten la mayor importancia; por otra parte, hacer reingeniería en los procesos es, posiblemente, necesario; sin embargo deberíamos tener claridad en que no son esos los únicos tipos de acuerdos y de acciones que debemos realizar, y que hay mucho que se juega en otros ámbitos.

Aumento de los actores

La gravedad de la problemática educacional del país en Matemáticas requiere que se pueda contar con la colaboración de (ojalá) todos quienes tengan algo que aportar a su solución.

Afortunadamente, hoy día podemos advertir que hay una mayor cantidad y variedad de personas involucradas en la educación en Chile. Por ejemplo, matemáticos profesionales han escrito textos de estudio para la enseñanza en el colegio o el liceo (libros que no cometen los gruesos errores que se encontraban en algunos de los que se usaban⁷), o se involucran en proyectos educacionales.

Es difícil sobreestimar la importancia de que los investigadores en Matemáticas se interesen en la enseñanza, y ejemplos interesantes de ello se pueden encontrar con facilidad.

Uno particularmente relevante consiste en el atraso considerable en la enseñanza de la disciplina desde el final del siglo XIX y hasta pasada la mitad del XX: mientras la enseñanza seguía la guía de textos tales como el de Hall y Knight aparecido en 1885 (Hall & Knight, 1959) y, más adelante, el de Granville de 1908 (Granville, 1941), la Matemática avanzó de manera considerable –en especial, desde la década de 1870–. Ya el Congreso Internacional de Matemáticos de 1904 mostró preocupación por ese rezago.

Por otra parte, cuando Félix Klein se ocupó de la formación de profesores, expresó que, según su parecer, el concepto de función era el más importante de la Matemática; agregó que no debería egresar del profesorado un estudiante que no hubiera usado alguna vez una calculadora, y añadió que se debería procurar enseñar los conceptos en consonancia con situaciones que fueran cercanas a los estudiantes... ¡en 1908! (Pasó más de medio siglo para que, en la enseñanza común, se tomara seriamente la idea de función; el conocimiento contextualizado parece una idea bastante más reciente... y las calculadoras electrónicas se inventarían sesenta años más tarde que la admonición de Klein).

Quienes poseen una mejor percepción acerca de cuáles son los avances y de la disciplina y cómo ella evoluciona son, obviamente, los matemáticos; ellos tienen una palabra irrenunciable (si bien no la única) respecto de qué se necesita saber en la disciplina⁸.

La necesaria convergencia

Independientemente del buen éxito de sus respectivas iniciativas aisladas, es obvio se necesita que estos actores puedan interactuar de buena manera. Sin embargo, ello no parece fácil; peor aún, las perspectivas de matemáticos y educadores en relación con el tema que nos ocupa son a menudo divergentes.

Según nuestros datos, quienes se ocupan de la educación en general parecen pensar que los científicos no entienden el asunto. Las opiniones de estos serían del tenor siguiente: mis alumnos aprenden, por lo tanto, soy un buen profesor [*petitio principii*]; siempre se ha hecho enseñado así [las circunstancias han cambiado, la enseñanza sigue masificándose]; hay mala formación preliminar [ahora

⁷ En un texto que fue usado por muchos colegios y liceos se encuentra la afirmación de que los números reales son 'los racionales y otros que se pueden construir con dos cortaduras o una sucesión', cosa que los autores parecen haber escuchado un día viernes en la tarde y no en un aula académica. Peor aún, un libro muy usado para preparar la antigua Prueba de Aptitud Académica incurre en 30 errores en dos páginas de Álgebra –tiene partes peores–. (De todas maneras, los profesores del sistema experimentan dificultades para leer los correctos textos escritos por matemáticos).

⁸ Es muy curioso que esa opinión experta no siempre se tome en cuenta. El exceso de estudio de Geometría Analítica y de Trigonometría en las universidades poco antes de 1960 es un caso digno de traer a colación (morigerado por la enseñanza de grupos finitos a cursos de Ingeniería en la década siguiente, en cualquier caso).

se puede culpar hasta el parvulario); los alumnos están más flojos que antes [se ha venido diciendo desde hace miles de años⁹]; habría que exigir más, "subir los niveles" [esa estrategia no está resultando].

Por su parte, la comunidad científica miraría con desconfianza los esfuerzos de los educadores. Según el parecer de aquellos, estos pensarían al tenor siguiente: el niño debería descubrir todo el conocimiento [completamente irreal, salvo para K. F. Gauss o alguien parecido]; la clase frontal debería prohibirse [lo cual parece inconsecuente¹⁰ y un tanto fundamentalista]; el científico sabe, pero no sabe enseñar [¿quién lo dice?]; la educación es asunto de los educadores, quienes pueden hacerlo sin importar qué materia les corresponda impartir [fue dicho por Comenius, un adelantado para su época... en 1647 (Comenio, 2000)].

Es conveniente añadir que la OECD (2004) manifiesta que no hay suficiente interacción entre quienes se encargan de la formación disciplinaria de los futuros profesores y quienes de los aspectos pedagógicos. Ello se traduce en que los estudiantes de pedagogía aprenden algunas cosas con los primeros, otras con los segundos, y la síntesis armoniosa que el estudiante haría de ambas vertientes es solo una ilusión.

Hay señales adicionales de que, pese a los esfuerzos, los diversos actores no estén en realidad respondiendo a la misión que el país comunitariamente les confía.

La contraproducente irreductibilidad de algunas posiciones se puede apreciar incluso en documentos de importancia. Por ejemplo, el Informe del Consejo Asesor Presidencial para la Calidad en la Educación (2006, p. 180), sin el respaldo a que estaría obligado a hacer y pese a las contundentes evidencias en contrario que incluye como referencias, pone una defensa de intereses sectoriales por encima de las urgentes necesidades del país que se le encomendó—y de la calidad que expresamente se le confió—¹¹.

Tan lamentable situación se puede ilustrar con el antiguo relato de los ciegos y el elefante: En una aldea reciben la noticia de que a un pueblo vecino han traído un elefante. Envían a una delegación a verlo; circunstancialmente, ella está formada solo de ciegos. Llegados al ignoto animal, cada uno se aproxima y trata de tocarlo. De vuelta a la aldea, los relatos son variados: una columna, un árbol, una lanza, un abanico, una serpiente... Lo peor del caso es que cada uno afirma que sólo su versión es la verdadera.

Mirar al exterior

Es evidente que, durante los últimos años, el MINEDUC ha llevado adelante una política coherente, informada y gravitante; ha habido también serios esfuerzos realizados desde universidades y otros organismos: una labor de la nación.

Lo anterior no obstante, preocupa la persistencia de cierta propensión a volverse hacia el exterior buscando que personas o grupos de individuos proporcionen al país una llave que resuelva los problemas que no sabemos manejar —una actitud dependiente, de colonia—; peor aún, la costumbre inclina a buscar respuestas en lugares en los que obviamente no están.

Fue inevitable que en los siglos XVII y XVIII miráramos siempre hacia España y hacia el Virreinato. Quienes dirigieron el país en el XIX estuvieron, por su parte, vueltos hacia Francia¹². El siglo XX y el comienzo de este nos muestran vueltos hacia los Estados Unidos de Norteamérica, ello incluso en materia educacional, a pesar de que hay ejemplos sensiblemente mejores¹³.

⁹ Sócrates se habría quejado de algo parecido, y, con mayor probabilidad, Hesíodo antes que él; habría además una tableta babilónica más de mil años precedente que lo haría. En cualquier caso, una reacción no demasiado original, ni fructífera.

¹⁰ Se puede oír conferencias al respecto.

¹¹ VII.5.6. Recomendaciones específicas referidas a la formación docente inicial. *Coordinación efectiva de la formación docente*; (quinto acápite).

¹² Ello se percibe aún con claridad en nuestra historia, literatura, arquitectura...

¹³ Evidentemente, no estamos hablando de que no podamos encontrar ideas fructíferas en cualquiera parte del mundo, nuestra crítica se refiere al recurso obligado a esa nación que se encuentra, por ejemplo, en algunos medios de comunicación, a pesar de las evidencias en contrario: por ejemplo, en la última medición de PISA, ese país esté sensiblemente bajo la media de los países encuestados.

Ciertamente, la globalización nos señala con claridad la necesidad de abrirnos a los aportes externos, muchas veces substantivos; es imperativo hacerlo. Ello no obstante, si acaso vamos a limitarnos a copiar lo que otros hacen, seguiremos enfrentados a tres problemas que hoy nos afectan: que estaremos siempre a la vera de otros (si se quiere: fuera de competición); que no existen respuestas prefabricadas, y, no menos importante, que no estaremos cumpliendo el deber de defender nuestra identidad cultural.

Qué duda puede caber: para aprovechar de buena manera lo que nos ofrece el exterior, debemos pararnos sobre nuestros propios pies.

Relevancia de los profesores

Un dato que debemos tomar en cuenta consiste en que aquellas virtudes ciudadanas que provienen del aprendizaje de las ciencias (Matemáticas incluida) se obtienen en la enseñanza básica y media o bien ya no se lograrán. Para eso –y pese a lo que afirman opiniones menos informadas– el rol del profesor es crucial.

Lo anterior nos trae nuevamente a una cuestión previa, ahora en formato más explícito: ¿Qué es aquello que constituye, hoy en día¹⁴, el saber de un profesor?

Tal pregunta no parece tener una respuesta homogénea, y es fácil comprobar que las que se ofrecen en el país son variadas. En efecto, una carrera de pedagogía en Matemáticas tendrá una composición bastante diversa si se asienta en una facultad de educación –la cual tenderá a enfatizar los aspectos pedagógicos generales– o en una de ciencias –que relevará el conocimiento matemático–.

Por supuesto, no es siquiera saludable esperar que haya una sola alternativa para enfrentar este difícil y complejo tema. Sin embargo, forzoso es reiterarlo, estando en juego tantos proyectos del país y de sus individuos, temas como este no deberían depender, en definitiva, del solo arbitrio de las opiniones, y es preciso buscar evidencias que sustenten las decisiones correspondientes.

Pedagogía y contenidos

Para tratar el tema de los conocimientos que debe poseer un profesor (de Matemáticas, en particular), la literatura internacional ha venido utilizando cierta nomenclatura debida a Lee Shulman (Shulman 1986, 1987) y que se ha ido popularizando en Chile en fecha más reciente. Ella divide esos conocimientos en tres componentes o ejes: el Conocimiento pedagógico (*Pedagogical Knowledge*, PK), Conocimiento de los contenidos (*Content Knowledge*, CK) y Conocimiento pedagógico de los contenidos¹⁵ (*Pedagogical Content Knowledge*, PCK).

Según Shulman, el Conocimiento pedagógico de los contenidos se refiere a las formas de representar y formular un determinado tema y hacerlo comprensible a otros. Incluye las formas más útiles de representación, las mejores analogías, ilustraciones, ejemplos y demostraciones. Comprende técnicas pedagógicas, estrategias de enseñanza que incorporan representaciones conceptuales apropiadas, discernir qué tipo de enseñanza sirve para un determinado contenido, saber cómo se pueden ordenar sus componentes para enseñarlo mejor. Incluye además conocimiento de qué hace que los conceptos sean difíciles o fáciles de enseñar. Repara en qué es lo que los alumnos traen a la situación de enseñanza, lo cual puede facilitar o dificultar la tarea que enfrentan: estrategias, concepciones previas (ingenuas y aprendidas), errores conceptuales (*misconceptions*) en que tienden a incurrir, aplicaciones erróneas de conocimientos previos. Procura abordar las dificultades anteriores y fomentar la comprensión significativa.

¹⁴ Esta cualidad de contemporáneo suele ser olvidada: con frecuencia se invita a recuperar ciertas virtudes que se cultivaron en el pasado, que, en conjunto son hoy insuficientes y algunas de las cuales deben ser reemplazadas por otras más pertinentes,

¹⁵ O, mejor, Conocimiento didáctico de los contenidos.

Saberes relevantes para los aprendizajes

El Centro para la Investigación Educacional del Instituto Max Planck para el Desarrollo Humano, en Alemania, en su proyecto COACTIV (2002-2006), estableció con claridad que, de aquellos tres ejes de formación pedagógica en Matemáticas¹⁶, son los dos últimos los determinantes para aumentar los aprendizajes de los alumnos. No se trata de una opinión, sino de un hecho comprobable¹⁷.

Por supuesto, son propósitos pedagógicos los que fundan una universidad; son ellos también los que impulsan a los padres a ocuparse de la formación de sus niños; la motivación de un buen profesor es, también, pedagógica. Es, por tanto, difícil encontrar consideraciones más importantes que esas respecto de la formación de nuestros semejantes. Sin embargo, nos dice la investigación, si se quiere que un niño aprenda una determinada disciplina, habrá que saber de esa ciencia y conocer, además, las dificultades específicas que el aprendiz debe enfrentar –y los propios padres, en plan de ayudar a sus hijos en sus deberes escolares, enfrentan una y otra vez esta realidad–.

Articular ambos aspectos es seguramente una tarea imprescindible. A su vez, esto requiere reconocer su importancia y también de distinguir sus ámbitos diversos –so pena de tomar, como estrategia de aprendizaje, la reflexión acerca de los fines generales de la educación, e. g.–

En cualquier caso, y pesar de estudios como el señalado son accesibles incluso al grueso público, hasta fecha muy reciente, en documentos oficiales acerca de la formación de profesores en Chile, hay escasa o nula referencia a la importancia de que el profesor sepa la materia que ha de enseñar¹⁸ –se trataría de un asunto opinable–.

Al respecto, conviene invocar una vez más el informe de la OECD, que indica con delicadeza pero también francamente que, en un segmento de edad, la mitad o más de los estudiantes de nuestro país aprende Matemáticas y Ciencias con profesores que no solo no saben las materias, sino que no tienen confianza en lo que hacen. (OECD, 2004, p. 57)

Desafortunadamente, aun la óptica de las *competencias* (controvertible pero de innegables efectos saludables), ha sido utilizada para desvalorizar el aprendizaje de los contenidos: ellas estarían por encima de los contenidos¹⁹.

Temas como estos hacen divergir a actores cuya mutua colaboración es necesaria para el país.

¿Basta con conocer los contenidos?

Se ha estado invitando a involucrarse en la enseñanza de las Matemáticas en las enseñanzas media y elemental a profesionales de distintas ocupaciones que requieren de la Matemática, y que, por lo tanto, conocen de ella. Al fin y al cabo, según los datos que mencionamos recién, se puede invocar con razón que el conocer esa disciplina es una variable de la mayor relevancia para enseñarla

Lo anterior no obstante, es preciso traer a colación con presteza una de las evidencias más contundentes en la Educación Matemática, en toda su historia, cual es el resultado de la introducción de las “Matemáticas Modernas” en los currículos escolares, en la década de los 60 y por todo el mundo: pese a las calificaciones de quienes diseñaron este profundo cambio en la enseñanza y a la importancia que le atribuyeron los diversos actores políticos que la apoyaron y/o adoptaron²⁰, la reforma fue un fracaso a escala global.

¹⁶ El Estudio incluye, además, Conocimiento para Aconsejar (Counseling Knowledge) y Conocimiento Organizacional.

¹⁷ En un interesante experimento adicional, el Proyecto pidió enseñar Matemáticas a dos grupos, uno de profesores de Ciencias experimentales del *Gymnasium* y otro de estudiantes de postgrado en Matemáticas; ambos grupos enseñaron a niños de una misma edad. Los resultados fueron, ya adivinó a usted, –ligeramente– superiores en el segundo grupo. INICIA ha puesto las cosas en mejor pie.

¹⁸ Ejemplos interesantes de esto son el *Informe de la Comisión sobre Formación Inicial Docente* (2005), documento que acompañó a la firma de un documento por el Ministro Bitar y medio centenar de rectores para mejorar la calidad de las pedagogías de todo Chile –pese a que en su elaboración participó solo un 8% (OCHO por ciento) de profesores de regiones–, y el libro *Docentes para el nuevo siglo. Hacia una política de desarrollo profesional docente*, (2006), ambos de la Serie Bicentenario del MINEDUC.

¹⁹ Desplazar la atención desde los contenidos a las competencias es indudablemente positivo, pero concluir desde allí que los contenidos no sean importantes revela, como sabemos, desinteligencia de la óptica de las competencias.

²⁰ Al número considerable de países que adoptaron esta gran reforma curricular, se unieron la Organización de Países Árabes, la de los Países Nórdicos, la de la antigua versión del Mercado Común europeo, la de los Estados Americanos y la de las Naciones Unidas.

Una de las lecciones de esa experiencia es que no basta elaborar lo que creemos que es un "buen diseño" de enseñanza –por ejemplo, un orden lógicamente apropiado de las materias–, y que es necesario apoyarse en evidencias que manifiesten que, en realidad, aquel diseño produce o facilita los aprendizajes.

Multi o interdisciplina

Parece claro, entonces, que se requiere verdaderamente de multi o, más bien, interdisciplina. Sin embargo, ¿dónde y cómo se pueden encontrar los diferentes actores?

Por de pronto y según sugerimos antes, los discursos muchas veces parecen a lo sumo contiguos, no convergentes: el educador (en su acepción, digamos, específica) tiende a hacer énfasis en los principios y la importancia general de la educación para los seres humanos y, por su parte, el matemático, en los aprendizajes de la disciplina. Además, este, de acuerdo a su experiencia, no cree realmente que las asignaturas pedagógicas ayuden realmente a mejorar esos aprendizajes (cuestión que es, como dijimos, respaldada por la investigación). Peor aún, el matemático se preocupa de las materias mismas, cosa acerca de la cual el educador no siempre parece experimentar mucho entusiasmo.

Ante ello, parece natural que cada cual perciba que sus puntos de vista no son debidamente valorados, y que uno reaccione en defensa de los 'fines superiores' de la educación y el otro en resguardo de la integridad de la disciplina...

De esta manera, el país pierde parte de los recursos con los que debería contar. Entre esos haberes se cuentan también la experiencia de aula del profesor del sistema (insuficientemente considerada por las instituciones formadoras, según los estudios).

Superar las desconfianzas parece difícil, pero necesario para conseguir los fines que comunitariamente nos proponemos. Trabajar en común tiene además la virtud de establecer un sustrato homogéneo para las acciones: un profesor de aula que no estudia (bien sea su práctica o lo que le ofrece el ambiente) puede estar atascado en un juicio equivocado acerca de las virtudes de su hacer²¹; un matemático puede aprender a buscar evidencias que sustenten aquellos de sus puntos de vista educacionales que no provienen de su conocimiento de la disciplina; un educador podría darse cuenta de que la problemática contiene elementos fuera de su alcance.

Para el caso de programas de pedagogía en los que participan educadores y matemáticos, la ausencia de acercamientos disciplinarios se suele traducir en un acuerdo puramente 'político' en que cada grupo se encarga de un aspecto, sin mayor apoyo de los unos por lo que hacen los otros. Ya sabemos quiénes son los perjudicados.

La Didáctica de la Matemática

Desde hace más de treinta años, se ha venido desarrollando, a partir de los trabajos de franceses prominentes, la Didáctica de la Matemática. Hasta antes de su parición (y tras el fracaso de las matemáticas Modernas) quienes se interesaban en la enseñanza de la matemática se habían preocupado principalmente de los currículos (los programas, su orden) y de análisis estadísticos (qué estrategia resultaba mejor). Esa aproximación no daba resultados satisfactorios, y la atención se desplazó a otros ámbitos, que señalaremos brevemente a continuación.

Hoy en día, la Didáctica de la Matemática (o Matemática Educativa) es una disciplina experimental, provista de marcos teóricos explícitos, y que exhibe resultados bien conocidos en el escenario internacional. Sus fundamentos nacen de la reflexión, la observación y la experimentación a partir de la propia Matemática.

Esta disciplina difiere por tanto de las metodologías de aula, y se distingue, además, de los estudios pedagógicos generales. Se sitúa directamente ante las relaciones entre profesores que enseñan un

²¹ Según han mostrado los recientes procesos de evaluación de desempeño docente

saber y alumnos que lo aprenden; es esa disciplina que se enseña y aprende a la vez la oportunidad de reunirse profesores y alumnos y lo que determina sus relaciones recíprocas. La concepción subyacente es diversa de aquella que afirma que hay conocimientos pedagógicos generales que se especializan para las diversas disciplinas, al modo en que se suele entender las "didácticas específicas".

La Didáctica de la Matemática tiene algunos puntos de encuentro con la propuesta de Shulman, pero difiere en la amplitud y organización de sus resultados y en sus alcances teóricos, que comportan claros aspectos epistemológicos.

Esta disciplina no habla, por tanto, de un vago e incommunicable *arte* del profesor, no se reduce a la metodología de enseñanza –y, cuando propone alguna metodología, lo hace desde un marco teórico, provisto a su vez de las correspondientes evidencias–.

La importancia de la teoría

Como en todo ámbito del conocimiento, es conveniente disponer de una teoría. La teoría es mejor que la sola, necesaria (y no siempre extrapolable) experiencia. Por lo demás, en ausencia de teoría, lo que precede a la observación es puramente ideología (desde un punto de vista científico, no solo externa, sino casi inevitablemente inconducente).

Ninguna disciplina es una colección de 'hechos'. Sin embargo, en educación parece haber quienes piensan que bastaría con una colección deshilvanada de acaecimientos, desprovista de consideraciones epistemológicas.

La interacción entre teoría, observación, experimentación y análisis es, como sabemos, un asunto de la mayor relevancia. Sin embargo, espíritus que tal vez se autodenominan 'pragmáticos' o tal vez 'prácticos' prefieren²² que los 'hechos' hablen por sí mismos. Curiosamente, esta actitud anticientífica es cultivada también a veces por científicos.

Naturalmente, sería ilusorio pensar que todo lo que un científico dice en el ámbito de su especialidad proviene de las evidencias encontradas (por lo demás, las disciplinas cognitivas nos dan mejores explicaciones al respecto): mucho de lo que dice proviene de su experiencia y su opinión. Sus puntos de vista, intuiciones, etc., son, naturalmente, autorizados, respetables y posiblemente iluminadores, pero es preciso distinguirlos de aquello que constituye propiamente un haber disciplinario.

Thomas Kuhn (1996) ha propuesto que el pensamiento científico tiene componentes paradigmáticas que varían en el tiempo. En ausencia de un *paradigma* compartido, cada investigación comienza, en verdad, ab initio, y se discute una y otra vez las nociones fundamentales.

Lakatos y Musgrave (1975) añaden que una ciencia es una sucesión de teorías enlazadas en *programas de investigación científica*: hay un núcleo o centro firme, hecho de evidencias que son el fruto de las teorías; hay también un 'cinturón protector' de hipótesis auxiliares, que las comunidades comparten sin disponer de evidencias suficientes; y hay además las heurísticas, procedimientos aplicables a la solución de los problemas, reglas metodológicas acerca de cuáles vías de investigación son evitables y cuáles válidas, y que definen implícitamente marco conceptual del programa.

La historia de la ciencia, dice Kuhn, es la de paradigmas que compiten entre sí. La competencia sería buena para el progreso científico: se trata de determinar, independientemente de cuáles son los fundamentos de una y otra teorías, cuál de ellas ofrece mejores explicaciones y respuestas. Lakatos agrega que es importante que una ciencia encuentre pronto su punto de saturación, en el cual aparecen con nitidez sus contradicciones y pueda entonces ser reemplazada por otra más pertinente.

Lo anterior corresponde a una reflexión un tanto abstracta acerca de la ciencia, pero describe bien, nos parece, el estado actual de lo que pasa, por ejemplo, con los proyectos en educación: no hay paradigmas (suficientemente) compartidos, se discuten siempre los fundamentos (lo cual se encuentra solo en forma ocasional en las ciencias establecidas), quienes evalúan los proyectos muchas veces no

²² Ingenuamente, osamos decir.

pertenecen al área y no entienden bien las problemáticas ni las propuestas, el inevitable sesgo en las evaluaciones es mayor²³.

Para el caso de un científico inclinado al determinismo, aparte de las consideraciones anteriores, hay otras dificultades que enfrentar antes de acercarse a un estudio propiamente didáctico: este se hace con el concurso de las disciplinas sociales o en su modalidad, cosa que aquel tiende a considerar insuficiente: no hay unas cuantas leyes simples, la predicción es inexacta, la replicabilidad dudosa.

La cuestión es, sin embargo y como de costumbre (y aparte de otras consideraciones, de carácter epistemológico) si, en ausencia de una disciplina que satisfaga las propias aspiraciones de rigor, es preferible basarse en la propia opinión, rica en conocimiento disciplinario pero seguramente restringida en su experiencia²⁴.

Al respecto, es conveniente tener presente que el sólo ‘pensarlo bien’ (el tema de la educación matemática) significa abordar el asunto a la manera en que se hacía hasta poco antes de Roger Bacon (1214-1294) o, en el mejor de los casos, a la primera mitad del siglo XVI²⁵: en verdad, como nos enseñaron ese autor, Francis Bacon (1561-1626), el propio Galileo y otros muchos, es necesario ir más allá del paradigma aristotélico, y buscar evidencias experimentales.

Las ciencias que concurren

La Didáctica de la Matemática es, de suyo, una empresa interdisciplinaria: la investigación de lo que sucede en un aula y la generación de propuestas de una problemática tan amplia como la de la educación de la Matemática forzosamente requiere del concurso de varias disciplinas: hay involucrados aspectos organizacionales, procesos cognitivos, realidades e historias personales diferentes de quienes aprenden...

Varias ciencias o disciplinas sociales proveen su aporte: psicología, sociología de la educación, economía, administración, son solo algunas de las que concurren.

La Matemática, por cierto, está en el origen y en el centro, independientemente de la concepción, ya sea pragmática o realista que tenemos de ella, y de si nos inclinamos más por el edificio matemático abstracto o por la actividad que la genera.

La historia de la Matemática y su epistemología son también ingredientes substantivos.

Cuando hablamos de Didáctica de la Matemática, entonces, no hablamos del estudio general de la pedagogía, sino a uno inextricablemente unido a la Matemática. Tampoco hablamos de la manera que a cada quien se le ocurra pensar que es buena para la enseñanza de una determinada materia, sin tener evidencias de que ella funciona. Sí nos referimos, reiteramos, a marcos teóricos explícitos, a evidencias empíricas o teóricas que fundamentan –o, al menos, acompañan– las estrategias de acción.

La Didáctica de la Matemática se adentra, profundiza allí donde otras disciplinas detienen su reflexión, bien sea por falta de visión o por una explicable carencia de incentivo ante fenómenos que no son realmente tema de su estudio, y frente a los cuales pueden ofrecer puntos de vista y aplicación de hallazgos previos, pero no son modificadas por ellos. Vamos a ilustrar esto último a continuación.

Ilustración

Ejemplos notorios de la importancia de la historia y la epistemología para la Didáctica de la matemática, así como de la insuficiencia de las aproximaciones que provienen de otras disciplinas, son: la lenta evolución de los conceptos de función, de límite, de continuidad; la difícil introducción de los números indo-arábigos en Europa; la trabajosa clarificación y construcción rigurosa de los diferentes

²³ ¿Por qué preocuparse de cuestiones tan obvias o sin importancia...? Es preferible ‘subir los niveles’ y trabajar con estudiantes mejor dotados y menos flojos...

²⁴ Esto último es muy relevante: un científico es naturalmente una persona muy motivada y de buenos hábitos de estudio, suele tener o desarrollar habilidades específicas para la disciplina que cultiva, y puede no entender las dificultades que enfrentan los alumnos. Más aún, su práctica docente suele estar circunscrita a estudiantes que tienen cualidades similares.

²⁵ Considere, por ejemplo, la opinión de Jean Dieudonné, uno de los matemáticos más eminentes del siglo pasado: « J’espère qu’on me croira si j’ajoute, que je n’ai aucun intérêt personnel dans ces questions d’Enseignement secondaire... J’ai simplement voulu verser au dossier de l’historien futur un exemple de ce que l’on pourrait faire en la matière si l’on cherchait à agir de façon rationnelle ». (Dieudonné, 1964, xi).

sistemas numéricos; la elucidación de la diferencia entre continuidad y continuidad uniforme, la aspiración de rigor matemático y sus límites...

Más adelante haremos una mención a algunos aportes muy elementales de la Didáctica de la matemática.

Ahora nos limitaremos a un ejemplo particularmente gráfico y central para mostrar cómo es que otras disciplinas se detienen en el punto donde un matemático y un didacta perciben que está la cuestión substantiva: el tema de las ecuaciones. La de primer grado fue conocida por babilonios y egipcios, números en la Edad Media, aparición de las variables.

En un sentido informal, las ecuaciones lineales fueron conocidas por muchos pueblos.

Por su parte, la ecuación cuadrática era conocida por los antiguos babilonios y egipcios, ya hacia 1600 a. C.

La ecuación cúbica es seguramente el problema abierto de mayor duración en la historia de la matemática. Hay algunos intentos en Grecia, en Alejandría, entre los árabes. Fibonacci en 1225 y matemáticos italianos posteriores procuran también una solución. Esta aparece con Nicolo Fontana, quien se la comunica a Gerolamo Cardano en 1543: hace un cambio de variable y obtiene una *resolvente*, de grado menor y cuyas raíces puede, por tanto, obtener.

Un discípulo de Cardano, Ludovico Ferrari, usando una metodología similar a la de Tartaglia, encuentra poco después una resolvente para la ecuación cuártica.

Joseph Louis Lagrange, en 1770, usa el método de resolventes para ecuaciones de grado 5, pero ahora el grado, en lugar de disminuir, sube; concluye que se necesita un nuevo punto de vista.

Este enfoque lo encuentra Galois, quien envía varias memorias a la Academia de Ciencias de París, entre 1829 y 1832, con escaso éxito, en parte debido a la oscuridad de sus escritos. Su resolución incluye las ideas de grupo, subgrupo normal y grupo cociente.

Camille Jordan elabora sobre el trabajo de Galois, que detalla en su libro *Traité des substitutions et des équations algébriques* (1870). Los grandes matemáticos Félix Klein y Sophus Lie reunidos en París tratan de leer el texto Jordan y les parece un libro sellado.

A pesar de la manera más clara en que hoy en día se puede exponer la teoría de Galois, que el tema de los subgrupos normales y el de los grupos cocientes sea de difícil acceso para los estudiantes no debería sorprendernos: se trata de una dificultad intrínseca, que no tiene relación con, por ejemplo, la motivación que se tenga para aprenderlo.

Algunos aportes de la Didáctica de la Matemática

El espacio del que disponemos es excesivamente breve para intentar siquiera dar una idea acerca de las grandes líneas de la Didáctica de la Matemática. Sin embargo, debemos mencionar siquiera algunas ideas que la disciplina ha introducido, algunos de los resultados de que ha provisto, de manera de dar una idea de la fecundidad que ella tiene para el tema que nos ocupa, y de cómo ella ha aportado evidencias y categorizaciones precisas, que van constituyendo, precisamente, un campo del saber en lo que se refiere a la enseñanza, el aprendizaje y aun la construcción de la Matemática. Nos referiremos solo a aquellas teorías en las cuales se trabaja en nuestro Instituto, sin ánimo de jerarquizarlas, y las traeremos a colación desde los trabajos de sus creadores y/o de sus autores más prominentes.

En primer lugar, la **escuela francesa**, algunos de cuyos representantes mencionamos a continuación, mostró evidencias de que hay *fenómenos didácticos*, que ocurren sin importar quiénes son los actores de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Donde una mirada un tanto externa ve solo errores de los alumnos, esta escuela ha mostrado evidencias de que se está, en realidad, ante saberes incompletos de los estudiantes, los cuales son producidos ya sea por dificultades intrínsecas de la materia bajo estudio, o por la bien conocida incapacidad transitoria de tener acceso a aquella, o bien son introducidos por el propio proceso de enseñanza y aprendizaje –y que deben ser tratados correspondientemente–.

Yves Chevallard (Chevallard, 1991) introdujo y explicitó una teoría particularmente iluminadora para nuestro tema: el profesor hace una *transposición didáctica*, esto es, el saber que enseña no es el mismo que el de los matemáticos –el *saber sabio* no es lo mismo que el *'saber que se enseña'*–. Dicha transposición requiere, naturalmente, de conocimiento de la disciplina, pero hay anexas una multitud de consideraciones que se requieren para realizarla (no limitarse a exhibir lo que expresan los

textos del saber, resguardar la integridad de la matemática –introducir conceptos correctos, no limitarse a técnicas de cálculo, etc.–).

Guy Brousseau (Brousseau, 1998) puso en relieve que los saberes culturales no pueden aprenderse sin la presencia de un sistema enseñante; de allí el famoso *triángulo didáctico*: importa considerar, de manera sistémica, el saber, quién enseña y quién aprende. Hay un *contrato didáctico*, largamente implícito, que regula las relaciones entre los actores, siempre presente, siempre cambiante, y que explica aspectos un tanto inesperados del comportamiento de los alumnos en un aula, por ejemplo. Es apropiado y fecundo diseñar *situaciones didácticas*, que comportan varias fases²⁶, para inducir los aprendizajes.

Michèle Artigue (Cf., por ejemplo, Artigue, 1989) ha impulsado el desarrollo de la metodología de la *ingeniería didáctica*: sea para investigar el aula o para hacer una propuesta didáctica, se hace primero un análisis preliminar (que incluye análisis: epistemológico del objeto matemático, de la enseñanza tradicional del objeto bajo estudio, de las concepciones de los alumnos, de los obstáculos que se presentan, y otros); luego un *análisis a priori* (diseño, control de la variabilidad, análisis predictivo –en relación a las posibles respuestas: expertas, incompletas, incluso erróneas–), diseño de investigación y/o de acción (creación de una situación didáctica, una secuencia de instrucción basada en las fases de la *teoría de situaciones didácticas*), y un *análisis a posteriori* –a partir de las producciones de los alumnos– y una *confrontación* de los análisis a priori y a posteriori. Como se aprecia, una metodología muy precisa, basada en la teoría, que busca y encuentra evidencias, de soporte y de consecuencias epistemológicas claros²⁷.

Alain Kuzniak y Katherine Houdement (Kuzniak, 1994; Houdement & Kuzniak, 2006), con su teoría de *Paradigmas y Espacio de trabajo geométrico*, ponen en evidencia equívocos importantes que inciden en el rol del profesor: la enseñanza que este recibió en cuanto tal posee estándares de rigor, que él trata de imponer a alumnos que no pueden cumplirlos o que no los necesitan o a los cuales les impiden progresar debidamente. (El análisis de un texto de estudio, e. g. muestra, por lo general, los diferentes paradigmas que se superponen, a veces sin concierto y sin fruto).

Ed Dubinsky (Dubinsky, 2001), ha encontrado que las concepciones que los aprendices de Matemáticas son diversas: hay *concepciones acción* (propuestas desde el exterior y realizadas sin independencia del alumno), *proceso* (sin realizar cada paso, puede imaginar lo que hay que hacer) y *objeto* (puede trabajar con ellas como un todo). Dichas concepciones dependen de ciertos mecanismos internos que el estudiante generalmente posee. Esta concepción entrega, para el caso de la Matemática, una lectura en mayor profundidad de los esquemas de Piaget. (Cf. además Trigueros, 2005). (Para el caso de los textos de estudio, resulta iluminador comprobar que con frecuencia se aspira a concepciones-objeto pero se dan elementos para construir concepciones-acción).

Ricardo Cantoral, Francisco Cordero y otros proponentes de la **Socioepistemología** (Cf. Cordero, 2001) nos invitan a *resignificar* los contenidos matemáticos, focalizándose en las *prácticas sociales* que los generan y de modo de obtener un conocimiento *funcional* de la Matemática –uno que no se restringe a aplicar algunos conocimientos dispersos–. (Entre otras virtudes, esto tiene suma importancia, por ejemplo, para la enseñanza universitaria, que suele desatender el modo en que los diversos profesionales generan matemáticas y hacen uso de ella).

Dejamos para el final una mención a la iluminadora teoría de nuestro distinguido invitado, el profesor **Raymond Duval**: la *Teoría de registros de representación semiótica* (Duval, 1995). En primer lugar, la actividad matemática, nos dice, está intrínsecamente ligada al lenguaje: no hay *noesis* sin *semiosis*, esto es, no hay actividad matemática sin utilización de registros de representación. El aprendizaje depende del uso de diversos registros, del paso o la transformación de unos a otros y de mantener cierta independencia respecto de ellos. (Note que el profesor suele hacer uso de diversos registros para mejor presentar conceptos y propiedades, y el alumno puede ir quedando cada vez más confundido –piense, por ejemplo, en vectores–). Por otra parte, el aprendizaje de la Matemática requiere de reemplazar ciertas concepciones *semánticas* –lo que una persona buenamente cree– por otras teóricas –

²⁶ No pretendemos hacer aquí siquiera mención a la complejidad de este fructífero concepto.

²⁷ Es posible articular esta metodología con las estrategias colaborativa del *Estudio de Clases* japonés, lo cual resulta muy productivo para profesores en ejercicio.

lo que ofrecen, precisamente, las teorías matemáticas–; un profesor que intenta *convencer* a sus alumnos de la veracidad de una afirmación mediante demostraciones, encuentra un terreno difícil: si ellos no creen que ella es verdadera, tenderán a persistir en su propia opinión, y si, por otra parte, estiman que la afirmación es verdadera, la demostración les resulta redundante.

Didáctica en Chile

En el año 1986, **Ismenia Guzmán Retamal**, entonces Magíster en Matemáticas y profesora de este Instituto, viajó a Estrasburgo a estudiar Didáctica de la Matemática en la Universidad Louis Pasteur. Su tesis *Le rôle des représentations dans l'appropriation de la notion de fonction* fue realizada bajo la guía del profesor François Pluvinage y presentada en 1990.

De vuelta a Chile, ella se encontró de lleno con la situación que hemos descrito, solo que un poco peor: no se conocía la Didáctica de la Matemática en el país; en efecto, a ella le debemos su introducción en la nación.

Con el tesón que todos quienes la conocen pueden testimoniar, la doctora Guzmán intentó convencer a una comunidad de matemáticos y profesores poco receptiva a esa nueva disciplina. Algunos le apoyamos, sin embargo, y un grupo secundó su liderazgo. Como resultado, no solo introdujo elementos de Didáctica en nuestro programa de Pedagogía, sino que se diseñó y lideró un Magíster en Enseñanza de las Ciencias con mención en Didáctica de la Matemática, inédito en el país.

El impacto de la disciplina prontamente se hizo notar, y ya las primeras promociones del Magíster contaron a alumnos del norte y del sur del país. Cuatro profesoras de la Universidad Nacional de Cuyo viajaron por dos años semanalmente a clases en este recinto; el programa se impartiría al año siguiente en esa universidad a una veintena de académicos; vinieron también alumnos del norte de Argentina, de Perú, de Honduras.

Ismenia se hizo conocida en Latinoamérica; en nuestro país, presidió la Sociedad de Educación Matemática de Chile, SOCHIEM.

Ella tiene un lugar bien ganado en la historia de la enseñanza de la matemática en nuestro país. Seguramente y debido a las investigaciones que realiza y a las respuestas que provee, la Didáctica de la Matemática habría llegado necesariamente a Chile. Sin embargo, para aquilatar la contribución de la doctora Ismenia Guzmán bien podríamos preguntarnos en dónde estaríamos hoy si ella no hubiera iniciado un proceso que llevó esta disciplina a la consideración de las autoridades y las universidades, y que se tradujo posteriormente en la graduación en la disciplina de profesores especialmente dedicados y aventajados –algunos de ellos, hoy doctores en el área–.

Esta conferencia se hace en su honor, y en agradecimiento por su liderazgo adelantado.

Palabras finales

Nuestra misión como educadores en Matemáticas es construir el conocimiento que el país necesita, en donde sea que nos corresponda actuar: en las aulas, en la investigación, en la elaboración de textos de estudio, en el diseño y ejecución de políticas públicas.

Para cada una de estas tareas, la Didáctica de la Matemática nos ofrece evidencias, metodologías, teorías y, en fin, luces de las cuales no dispondríamos sin ella.

Hace un par de días, el Consejo Superior de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso aprobó la creación de un Doctorado en Didáctica de la Matemática, que se impartirá en nuestro Instituto. Este programa se realizará en conjunto con dos instituciones del mayor prestigio posible, como son el Laboratorio André Revuz de la Universidad de París-Diderot y el Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigaciones y Estudios Avanzados de México; pioneros, uno en el mundo, el otro en Latinoamérica.

Tal como hemos hecho con el actual Magíster en Didáctica de la Matemática, y estando este doctorado concebido como un servicio a nuestro país y a la región, invitamos a participar en él como profesores a los escasos especialistas en el área dispersos a lo largo de nuestra geografía, con la única restricción de producción científica que exigen un programa de esta naturaleza y las instituciones asociadas.

El doctorado es una muestra adicional del progresivo desarrollo de la Didáctica de la Matemática en el país. Nos parece oportuno, por tanto, agradecer a quienes nos han permitido introducirnos en ella. En este momento, podemos hacerlo en dos personas particularmente relevantes que nos acompañan hoy: el creador de una de las teorías que guían nuestro estudio y nuestras propuestas, y quien introdujo la disciplina en el país y la región.

Profesor Raymond Duval, doctora Ismenia Guzmán: tengo el honor y el privilegio de representar a ustedes el agradecimiento de todos quienes nos hemos beneficiado de su saber a través de esta institución, y el de muchos otros que lo aprovechan o lo recibirán mediante nosotros, incluso sin conocerles a ustedes.

Referencias

Artigue, M. (1989). Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaires. *Cahiers du Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique No 107*, 284-209. Paris: IREM, Université Paris 7.

Beca, C., García Huidobro, J., Montt, P., Sotomayor, C. & Walker, H. (2006). *Docentes para el nuevo siglo. Hacia una política de desarrollo profesional docente*. Serie Bicentenario. Santiago: MINEDUC.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations Didactiques*, Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, I. (1991). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Paris: La Pensée Sauvage.

Comenio, J. (2000). *Didáctica Magna*. México: Porrúa.

Comisión sobre Formación Inicial Docente. (2005). *Informe de la Comisión sobre Formación Inicial Docente*. Encuentro Nacional: Propuestas de Políticas para la Formación Docente en Chile. Serie Bicentenario. Santiago: MINEDUC.

Consejo Asesor Presidencial para la Calidad en la Educación. (2006). *Informe Final*. Santiago: MINEDUC.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2) pp. 103-128.

Dieudonné, J. (1964). *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Paris: Hermann.

Dubinsky, E. & Mc Donald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton, et al. (eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, pp. 273-280.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne: Éditions Peter Lang.

Fehr, H., Camp, J. & Kellog, H. (1971). *La Revolución en las Matemáticas Escolares*. Washington, D. C.: Secretaría General de la Organización de los Estados Americanos.

Granville, W. A. (1941). *Elements of the Differential and Integral Calculus*. Boston: The Atheneum Press.

Hall, H. S. & Knight, S. R. (1952). *Higher Algebra*. London: Mac Millan & Co. (First Edition 1885).

Houdement, C. & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes Géométriques et Enseignement de la Géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Volume 11, P. 175-193.

Jordan, C. (1870). *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Paris: Gauthier-Vilars.

Klein, F. (2004). *Elementary Mathematics from and advanced standpoint. Arithmetic, Algebra, Analysis*. New York: Dover.

Kuhn, T. S. (1996). *The structure of the scientific revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.

Kuzniak, A. (1994). *Étude des stratégies de formation en Mathématique utilisées par les formateurs des maîtres du premier degré*. Thèse doctorale. Paris: IREM Université de Paris 7.

Lakatos, I. & Musgrave, A. (1970). *Criticism and the Growth of Knowledge*. Cambridge: Cambridge University Press.

Max Planck Institute for Human Development, The. (2002-2006). *COACTIV*.
http://www.mpib-berlin.mpg.de/coactiv/download/Flyer_Coaktiv_eng_MPIB.pdf

Mena, A. (2007). Why focusing on representation: from a semiotic to a purely mathematical approach. *APEC-Tsukuba International Conference III*.
http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2008/index_en.php

OECD (2004). *Revisión de Políticas Nacionales de Educación. Chile*. Paris: Organisation for Economic Cooperation and Development.

Piaget, J. (1970). *Épistémologie Génétique*. Paris: Presses Universitaires de France.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2): 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1-22.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17 (1), 5-31.

UNESCO-ICSU, (1999). Declaración sobre la Ciencia y el uso del saber científico. *Ciencia para el siglo XXI. Un nuevo compromiso*. Budapest: UNESCO.